Skript

Eigenschaften und Grenzwerte von Folgen

von

Georg Sahliger

Mainz, 17.11.2018

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Zu den schwierigeren Kapiteln der Oberstufenmathematik zählt zweifelos das Kapitel „Folgen“. Ob es nun besonders lohnenswert ist, diese Kapitel zu bearbeiten, möchte ich an dieser Stelle nicht erötern. Lediglich etwas Mut machen, dass es auch in diesem Thema viel Interssantes zu erarbeiten gibt und diese Thema ein tieferes Verständnis für das mathematische Denken in Definitionen, Sätzen und Beweisen fördert und nicht zuletzt nehmen wir hier aufch den Kampf gegen die Unendlichkeit auf. Wichtig ist mir aber vor allem, zu erwähnen, dass Schüler oft bei den anderen Themen weniger Schwierigkeiten haben. Daher heißt das Motto „Durchhalten – Es wird besser“.

Umviele Schwierigkeiten aus dem Weg zu räumen und den Zugang möglichst einfach zu gesstalten, möchte ich doch einiges an Vorwissen erwähnen. Damit sind vor Rechnungen gemeint, die man öfter benötigt. Ebenso möchte ich noch einmal wiederholen, was man unter einer Funktion versteht und anschließed eineige neue Funktionen vorstellen. Linarea und quadratische Funktionn und ebenso die trigonometrischen Funktionen sollen nicht vorgestellt werden. Hier möchte ich auf die entsprechenden Skripte bei www.sahliger.net verweisen.

2. Vorwissen

2.1. Wiederholung zur Definition einer Funktion

Von einer Zuordnung zu einer Funktion.

Definition: Eine Zuordnung, die jedem Element aus der Definitionsmenge genau ein Element aus der Wertemenge zuordnet, nennt man Funktion.

Beispiele:

- Jedem Schüler wird ein Sitzplatz zugeordnet.
- Jedes Kind aus der Klasse erhält ein Eis.
- Jedem Auto beim Händler wird ein Preis zugeordnet.

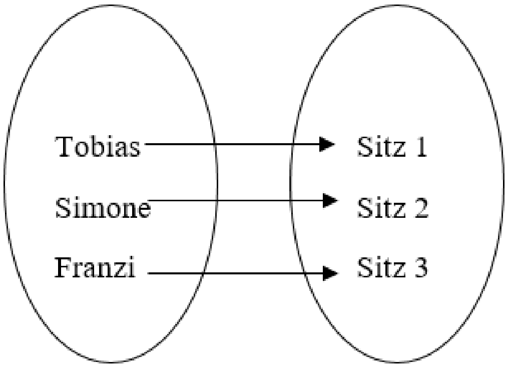
Erklärung: Soll eine Zuordnung auch eine Funktion sein, dann muss jedem Element genau ein anderer Wert zugeordnet werden. "Genau ein" bedeutet, dass den Werten nicht zwei oder mehr Werte zugeordnet werden, aber auch nicht null Werte. Die Elemente, von denen man ausgeht, gehören zur Definitionsmenge. Die Werte, die zugeordnet werden, stammen aus der Wertemenge.

Jeder Schüler (Definitionsmenge) erhält genau einen Sitzplatz (Wertemenge).

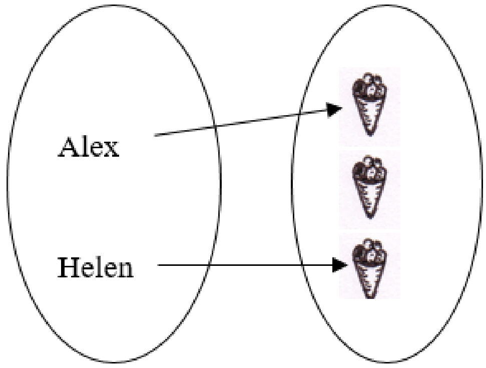
Natürlich kann man die Mengen auch tauschen. Erstellt ein Lehrer einen Sitzplan, dann geht er von den Sitzplätzen aus (Definitionsmenge) und ordnet diesen SchülerInnen (Wertemenge) zu.

Die Zuordnung: Schüler $\rightarrow$ Sitzplätze ist sogar eine Funktion, da jeder Schüler einen Platz bekommt und zwar genau einen und nicht null oder mehr als einen Platz. Dass es am Ende noch freie Plätze gibt, ist kein Problem. Wichtig ist nur, dass die Bedingungen „Jeder darf mitspielen" und „Jeder erhält genau einen" erfüllt sind.

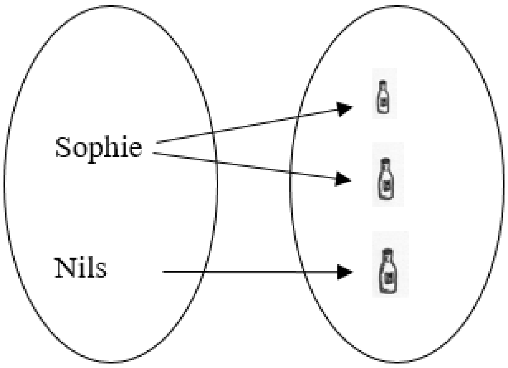
1. Zuordnung



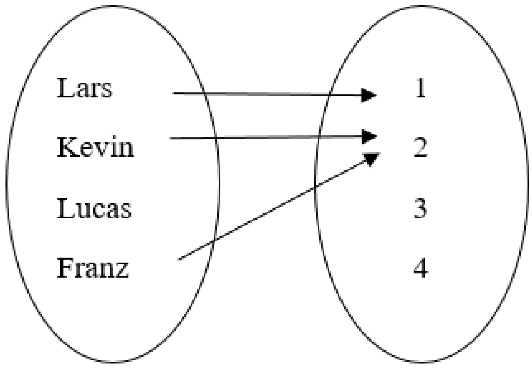
2. Zuordnung



3. Zuordnung



4. Zuordnung



Bei welchen der vier Zuordnungen handelt es sich auch um Funktionen?

Zuordnung 1 ist eine Funktion. „Jeder darf mitspielen“, „Jeder erhält genau einen“.

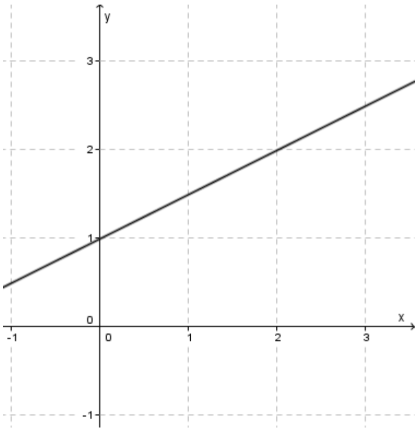
Zuordnung 2 ist auch eine Funktion. Jeder darf mitspielen, „Jeder erhält genau einen“. Dass ein Eis nicht gegessen wird, verstößt nicht gegen die Definition.

Zuordnung 3 stellt keine Funktion dar, da Sophie mehr als ein Getränk zugeordnet wird.

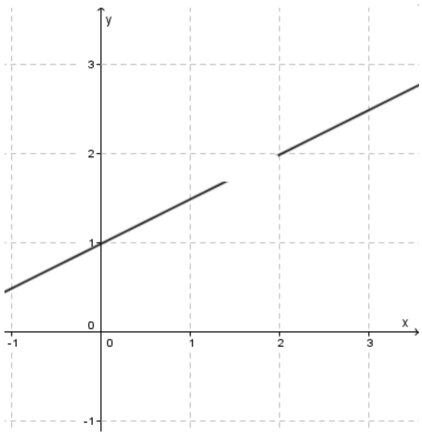
Zuordnung 4 stellt auch keine Funktion dar, da Lucas keine Note erhält. Dass die Note 2 zweimal vergeben wird, verstößt nicht gegen die Definition.

Auch bei Schaubildern, kann man erkennen, ob es sich um eine Zuordnung oder um eine Funktion handelt.

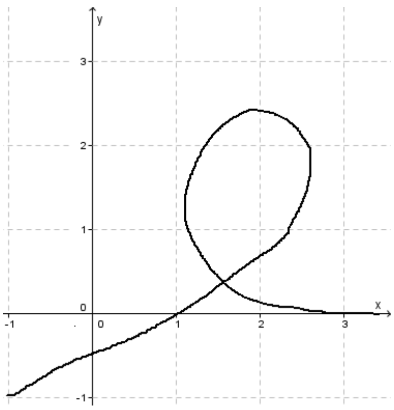
Zuordnung 1



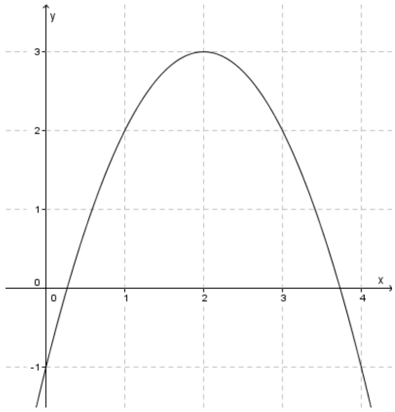
Zuordnung 2



Zuordnung 3



Zuordnung 4



Anmerkung: Bei Schaubildern als Koordinatensystem findet man die Definitionsmenge bei den Werten der x-Achse und die Wertemenge bei den Werten der y- Achse.

Bei welchen der vier Zuordnungen handelt es sich auch um Funktionen?

Zuordnung 1 ist eine Funktion. „Jeder Wert der x-Achse darf mitspielen“, „Jeder erhält genau einen y-Wert“.

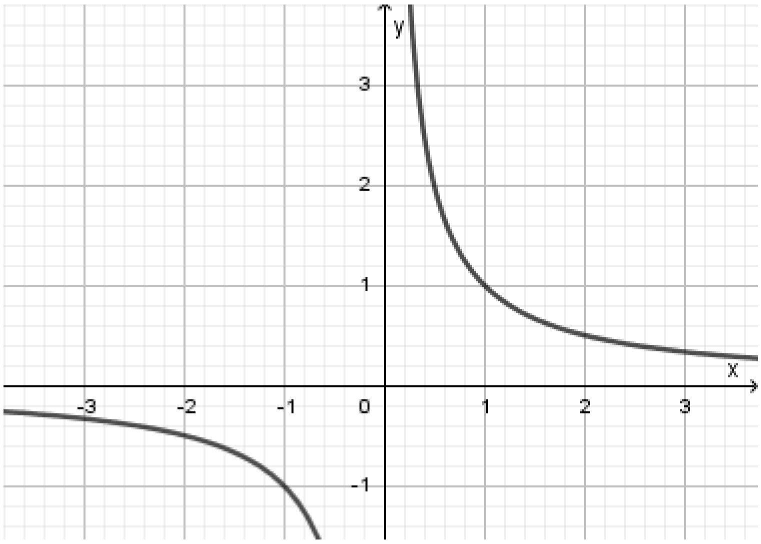
Zuordnung 2 ist keine Funktion. Aufgrund der Definitionslücke erhält nicht jeder x-Wert einen y-Wert.

Zuordnung 3 stellt auch keine Funktion dar, da z.B. dem x-Wert 2 sogar drei Werte zugeordnet werden.

Zuordnung 4 stellt eine Funktion dar. Dass die y-Werte immer zweimal vergeben werden, verstößt nicht gegen die Definition.

2.2. Beispiele für Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



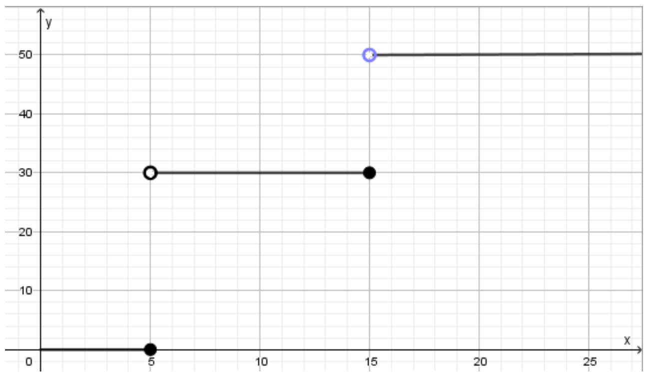
Die Stelle x = 0 ist nicht definiert.Die Funktion hat den Defiinitionsbereich: ID = IR \ 0 . Also alle reellen Zahlen ohne die Null. Ebenso gilt auch für den Wertebereich, also alle möglichen y-Werte: IW = IR \ 0.

Für plus unendlich (+.∞) und minus unendlich (-∞) nähert sich die Funktion immer mehr der x - Achse an, ohne diese zu berühren oder gar zu unterschreiten. Man sagt. „Die x-Achse ist die waagrechte Asymptote der Funktion.“

a) Die Treppenfunktion

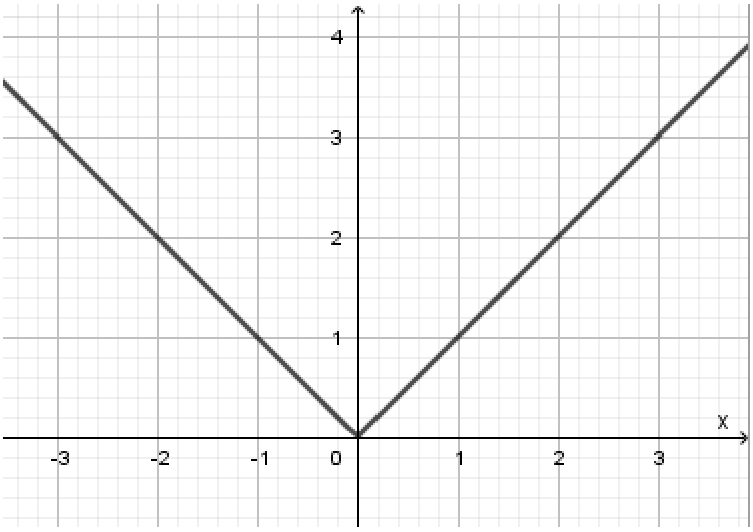
In einem Hotel zahlen Kinder bis 6 Jahre nichts. Ab 6 Jahren bis 14 kostet eine Übernachtung 30 Euro und darüber dann 50 Euro. Solche Sachverhalte stellt man in iner abscnhitssweise definierten Funktion, bzw. Treppenfunktion dar.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad für\ 0 \le x \le 5 \\ 30\ für\ 6 < x \le 15 \\ 50\ für\ x > 15 \end{cases}$$



Wichtig ist natürlich, welchen y-Wert man an den Grenzstellen nimmt. Zahlt das Kind an seinem Genurtstag schon den höhreen Preis oder den niedrigeren? Daher muss man genau be der Verwendung von „<“ bzw. „≤“ achten. Im Schaubild zeigt man dies so, dass ein Kreis hohl ist und der andere Kreis, dessen y-Wert gelten soll, ausgefüllt ist.

c) Die Bertragsfunktion



f(x) = |x| Aus der Mittelstufe wissen wir, dass die Betragstriche bei einem negativen Zahl beweiken, dass diese positiv wird. Also |-2| = +2. Die Wertetabelle sieht dann folgendermaßen aus:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	3	2	1	0	1	2	3

2.3. Rechnungen

Bei diesem Thema muss man öfter Brüche addieren bzw. subtrahieren.

Wir erinnern uns, dass man dies durch Finden des gmeinsamen Hauptnenners erreicht:

$\frac{2}{3}+\frac{5}{7}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 7}+\frac{5\cdot 3}{7\cdot 3}=\frac{14}{21}+\frac{15}{21}=\frac{29}{21}=1\frac{8}{21}$

Das geht natürlich auch etwas komplizierter, aber im Grunde genauso:

$\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n}=\frac{1\cdot n}{(n+1)\cdot n}+\frac{2\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n}=\frac{n}{(n+1)\cdot n}+\frac{2n+2}{(n+1)\cdot n}=\frac{n+(2n+2)}{(n+1)\cdot n}=\frac{3n+2}{(n+1)\cdot n}$

Bitte hier nicht das „n“ kürzen. Denn aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dum..

Kürzen darf man nur, wenn man n ausklammern kann: $\frac{3\,n^2+n}{(n+1)\cdot n}=\frac{n(3n+1)}{(n+1)\cdot n}=\frac{3n+1}{n+1}$

Noch ein Beispiel: $\frac{3}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{3\cdot n}{(n+1)\cdot n}-\frac{2\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n}=\frac{3n}{(n+1)\cdot n}-\frac{2n+2}{(n+1)\cdot n}=\frac{3n-(2n+2)}{(n+1)\cdot n}=\frac{3n-2n-2}{(n+1)\cdot n}=\frac{n-2}{(n+1)\cdot n}$

Wichtig ist es, dass man immer die Klammer setzt, wenn man die beiden Brüche auf einen Bruchstrich schreibt.

Gelegentlich kann man auch folgenden Rechentrick mit der 3. Binomischen Formel gebrauchen:

$\frac{n^2-1}{(n+1)}=\frac{n^2-1^2}{(n+1)}=\frac{(n+1)(n-1)}{(n+1)}=n-1$

3. Einstieg Folgen

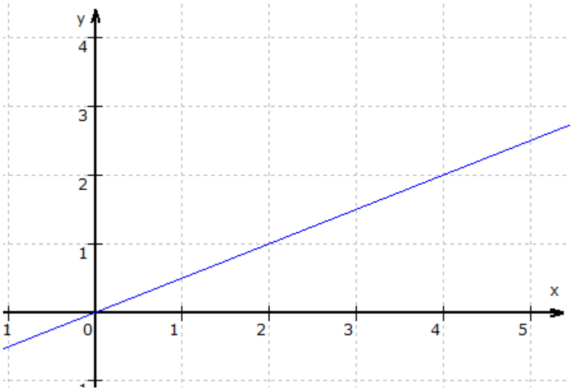
Folgen und Reihen

Vorbemerkung: Sei N* = {1,2,3,4,5…} und N = {0,1,2,3,4..}

Beispiel für eine Folge im Vergleich zur Funktion.

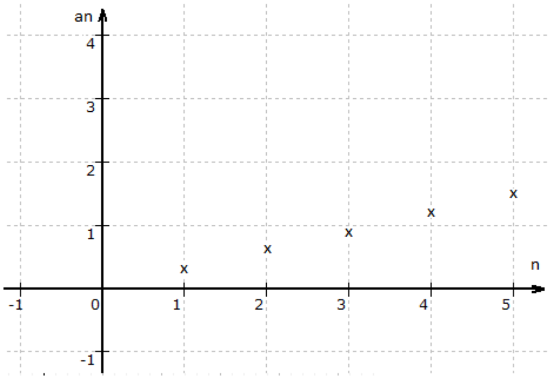
Funktion: Ein Liter Milch kostet 0,50 Euro.

$y = 0,5x$



Folge: Ein Ei kostet 0,30 Euro

$a_n = 0,3n$



Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Funktionen und Folgen:

Gemeinsamkeiten:

Eine Vorschrift liegt beiden zugrunde.

Beide lassen sich in ein Koordinatensystem zeichnen

Man kann eine Wertetabelle erstellen

Unterschiede:

Der „Graph“ besteht aus einzelnen Punkten ➔ Definitionsmenge ist N

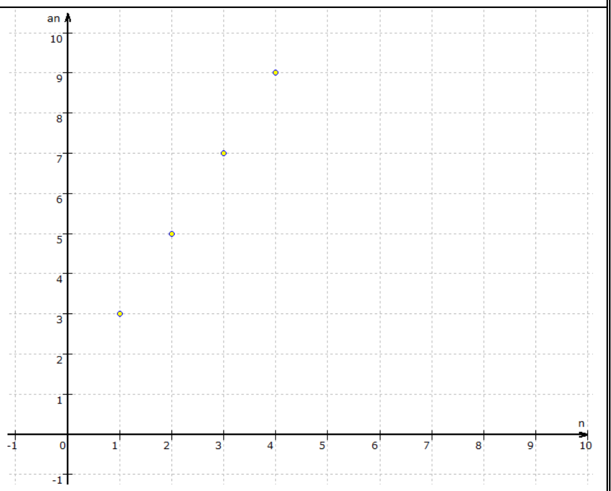
Definition einer Folge:

Hat eine Funktion f als Definitionsmenge die Menge N* oder eine unendliche Teilmenge von N*, so nennt man f eine Zahlenfolge. Der Funktionswert f(n) wird mit a_n bezeichnet und heißt das n-te Glied der Folge. Für die Funktion f schreibt man (a_n).

Zeichnen einer Folge mittels Wertetabelle:

Zeichne die Folge $a_n = 2n+1$

n	1	2	3	4	5
a_n	3	5	7	9	11



Aufgabe: Berechne die ersten 5 Folgeglieder der Folgen und zeichne die Folge in ein Koordinatensystem:

1.) $a_n = 2n$ für $n > 0$ und 2.) $a_{n+1} = a_n + 2$ Startwert $a_1 = 2$

n	1	2	3	4	5
$a_n = 2n$	2	4	6	8	10
$a_{n+1} = a_n + 2$ Startwert $a_1 = 2$	2	4	6	8	10

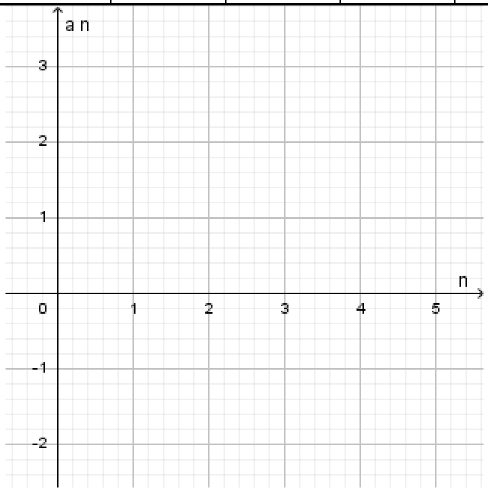
Wir stellen fest, dass beide Folgen gleich sind. Dabei wurde die Folge 1 direkt bzw. explizit ausgerechnet und die Folge 2 rekursiv. Das bedeutet, dass man das erste Folgeglied gegeben haben muss und davon ausgehend, kann man alle weiteren berechnen.

4. Explizite Folgen

Aufgabe: Berechne die ersten 5 Folgeglieder der angegeben Folgen und zeichne die Folge in das Koordinatensystem

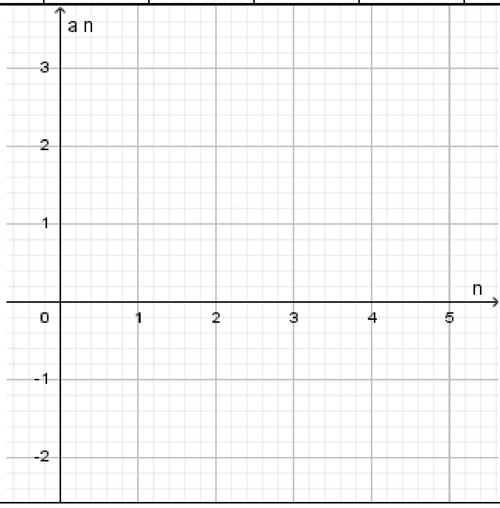
$$a_n := \frac{2n}{5}$$

n	1	2	3	4	5
a_n					



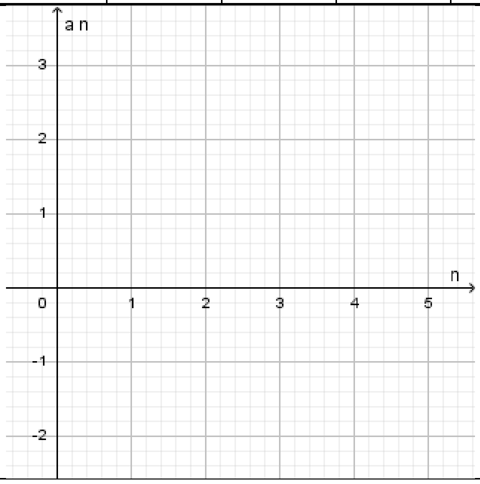
$$a_n := \frac{1}{n}$$

n	1	2	3	4	5
a_n					



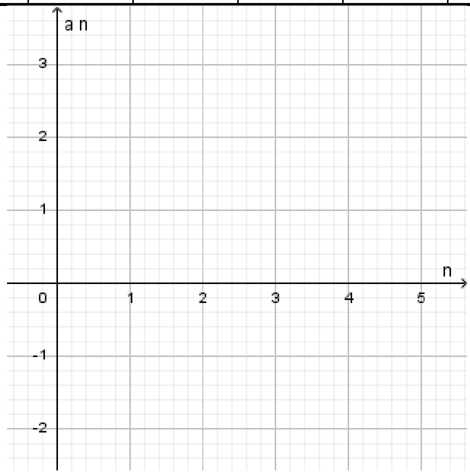
$$a_n := (-1)^n$$

n	1	2	3	4	5
a_n					



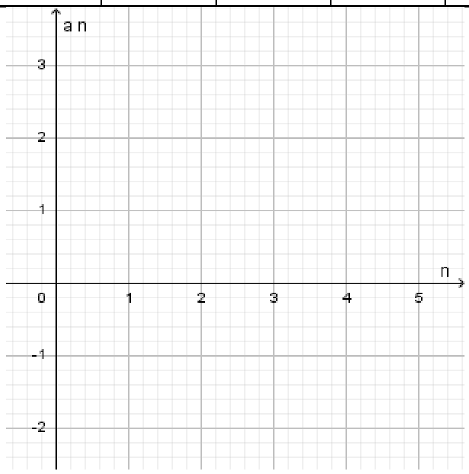
$$a_n := 2$$

n	1	2	3	4	5
a_n					



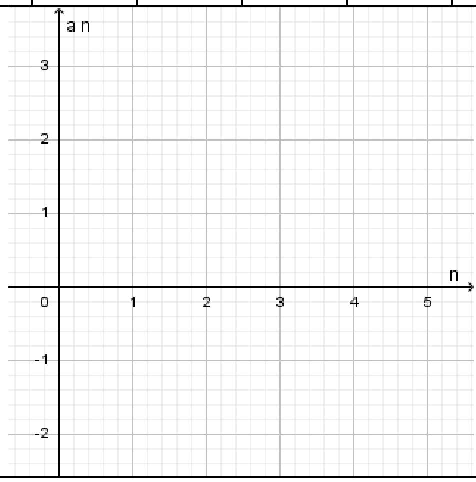
$$a_n := \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

n	1	2	3	4	5
a_n					



$$a_n := \frac{\pi}{2} n$$

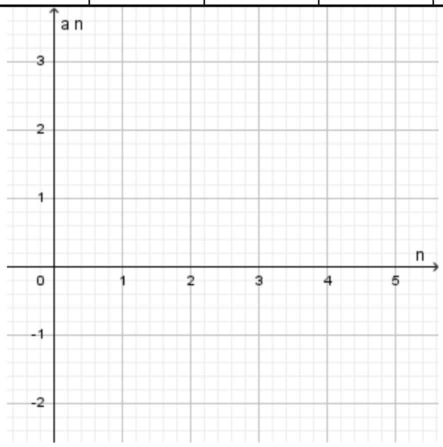
n	1	2	3	4	5
a_n					



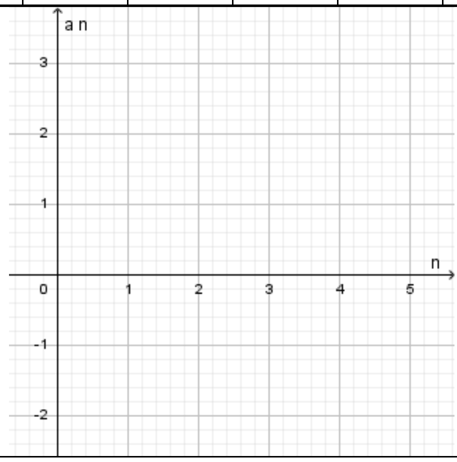
5. Rekursive Folgen

Aufgabe: Berechne die ersten 5 Folgeglieder der angegeben Folgen und zeichne die Folge in das Koordinatensystem.

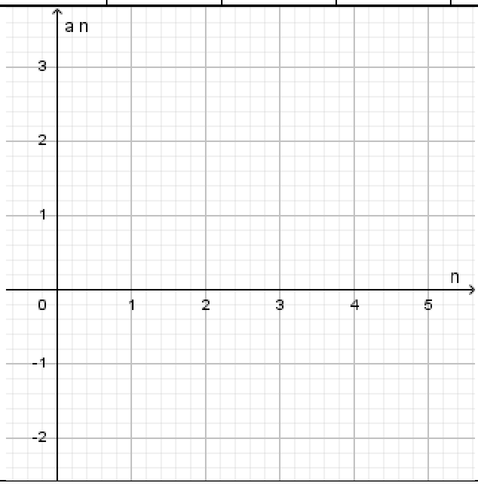
n	1	2	3	4	5
a_n					



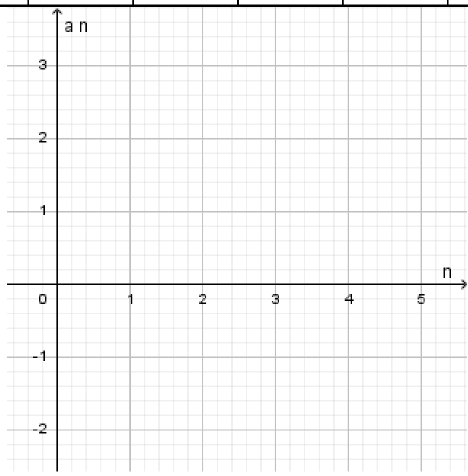
n	1	2	3	4	5
a_n					



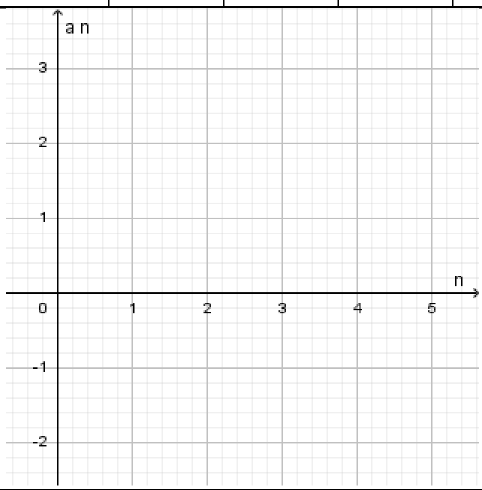
n	1	2	3	4	5
a_n					



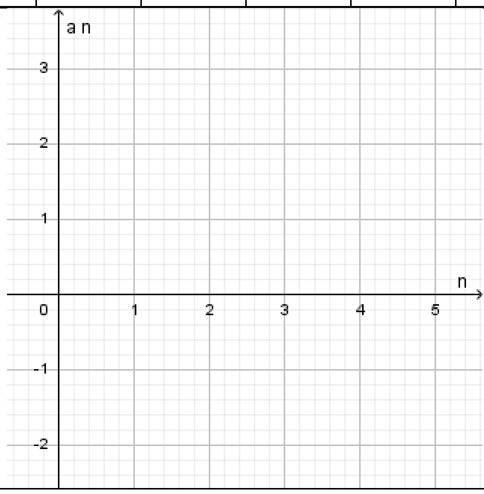
n	1	2	3	4	5
a_n					



n	1	2	3	4	5
a_n					



n	1	2	3	4	5
a_n					



Beispiel:

6. Weitere Beispiele für Folgen

Folge	Explizite Darstellung	Rekursive Darstellung
2 4 6 8 10 ___	$a_n \coloneqq 2\,n$	$a_{n+1} = a_n + 2$
2 2 2 2 __	$a_n = 2$	$a_{n+1} = 2$
3 5 7 9 __	$a_n = 2n + 1$	$a_{n+1} = a_n + 2$ Startwert: $a_0 = 3$
1 1 2 3 5 __ Dies Folge heißt Fibonaccifolge.	Die explizite Darstellung ist doch etwas kompliziert und soll hier nicht für Verwirrung sorgen.	$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ Man addiert also jeweils die beiden Vorgänger.

Anmerkung: Die Fibonaccifolge finden wir in vielen Bereichen in der Natur, aber auch in der Wirtschaft, z.B. um Börsenkurse zu analysieren.

Weitere Informationen findet man z.B. gut aufbereitet als Videos bei Youtube.

7. Folgen und Wachstum

7.1. Wiederholung Logarithmus

7.2. Folgen und Zinseszins

Jakob bekommt jedes Jahr auf ein Aktendepot 2% Zinsen. Am Anfang hat er ein Kapital von 1000 Euro. Den Anfangsstand bezeichnen wir mit K_0.

a) Berechne sowohl rekursiv als auch explizit die ersten drei Jahre K_0, K_1,K_2, K_3.

Rekursiv	Explizit
$K_0 = 1000$ $K_1 = 1000 \cdot 1{,}02 = 1020$ $K_2 = 1020 \cdot 1{,}02 = 1040{,}4$ $K_3 = 1040{,}4 \cdot 1{,}02 = 1061{,}21$	Beim rekursive Ansatz mulitipliziert man die 1000 Euro immer wieder mit 1,02 und zwar ensprechnd der gesuchten Jahre n mal. $1020 \cdot 1.02 \cdot 1.02 \cdot \ldots \cdot 1.02 = 1040{,}4$ Daher kann man auch explizit schreiben: $1000 \cdot 1.02^n$ im 3. Jahr: $1000 \cdot 1.02^3 = 1061{,}21$

b) Ab wann hat sich das Kapital verdoppelt?

Der Ansatz $2000 = 1000 \cdot 1.02^n$ führt zu $2 = 1.02^n$

Dies berechnet man mit dem Logarithmus $\log_{1,02} 2 = 35{,}002$. Also nach 36 Jahren hat sich das Kapital verdoppelt, da man hier immer aufrunden muss.

Anmermurkung. Diese Rechnung braucht man auch in der Chemie, wenn man Halbwertszeiten eines Stoffes bestimmen will. Dann schreibt man anstatt: $2 = 1.02^n$ einfach $½ = 1.02^n$.

8. Eigenschaften von Folgen

Definition: Eine Zahlenfolge a_n heißt

streng monoton steigend, wenn für alle Folgeglieder gilt $a_{n+1} > a_n$ ist, und

streng monoton fallend, wenn für alle Folgeglieder $a_{n+1} < a_n$ ist.

Gilt für die Folgeglieder ≤ bzw. ≥ statt < bzw. >, so spricht man nur von „monoton fallend bzw. monoton steigend.

Beispiel: Zeige, dass die Folge $a_n = n + 1$ streng monoton steigend ist.

Man muss also zeigen, dass $a_{n+1} > a_n$ für alle Folgeglieder ist.

Zunächst brauchen wir a_{n+1}. Diese erhalten wir, indem wir statt n einfach n+1 schreiben. Dann muss mannur noch zeigen, dass dis kleiner ist als a_n.

$a_{n+1} = (n+ 1) + 1 = n + 1+ 1 = n + 2 > n + 1 = a_n$

Also gilt: $a_{n+1} > a_n$

Damit haben wir gezeigt, dass die Folge streng monoton steigend ist.

Definition: Eine Zahlenfolge a_n heißt nach

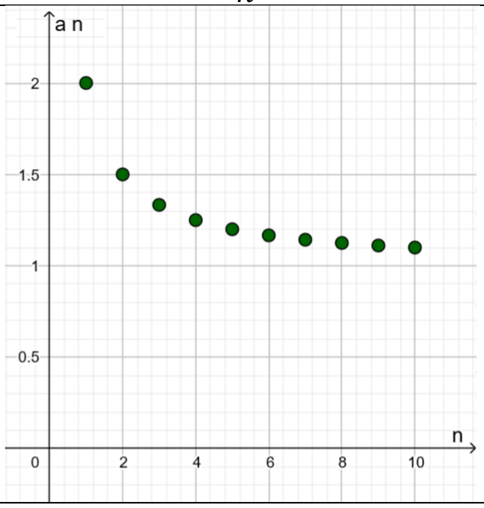
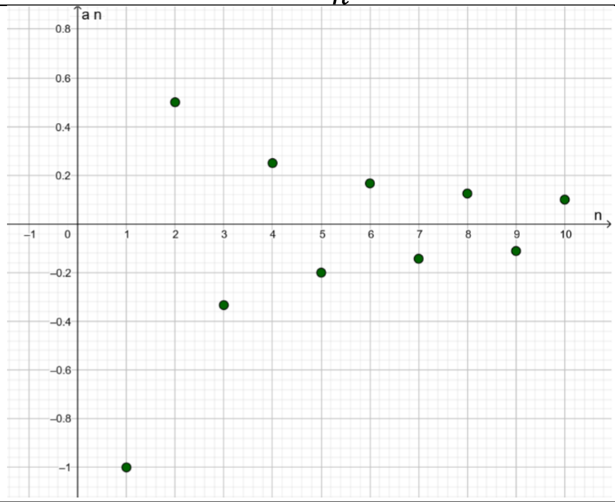
nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl S gibt, sodass für alle Folgeglieder $a_n \leq S$ ist , und

nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl s gibt, sodass für alle Folgeglieder $a_n \geq s$ ist.

S nennt man eine obere Schranke, und s eine untere Schranke der Folge.

Eine nach oben *und* unten beschränkte Folge heißt **beschränkte Folge**.

Beispiele

<table>
<tr><td>$$a_n = \frac{1}{n} + 1$$</td><td>$$b_n = \frac{(-1)^n}{n}$$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Monotonie</td></tr>
<tr><td>Beh: a_n ist monoton fallend

Bew

Da n > 0, gilt:

$n < n + 1$

$\frac{n}{1} < \frac{n+1}{1} \quad | : n \; | : n+1$

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \; | +1$

$$\frac{1}{n+1} + 1 < \frac{1}{n} + 1$$
Da dies also für alle n ∈ IN* gilt, ist die Folge streng monoton fallend.</td><td>Beh: b_n ist nicht monoton

Bew:

Es gilt $a_1 < a_2$ und $a_2 > a_3$.

Daher ist die Folge weder monoton steigend noch monoton fallend.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Beschränktheit</td></tr>
<tr><td>Alle Folgeglieder sind auf jeden Fall größer als 0,5 daher ist 0,5 eine von vielen unteren Schranken s. Ebenso gilt, dass alle Folgeglieder kleiner sind als 2,5. Daher ist S eine obere Schranke.

Da die Folge nach oben und nach unten beschränkt ist, nennt man sie beschränkt.

Es ist nicht unbedingt nötig, dass man als Beispiel die größte untere Schranke mit s = 1 nennt. Irgendeine untere Schrank genügt.

Die kleinste obere Schranke ist bei S = 2.</td><td>Mit s = -1 und S = 1 finden wir zwei Schranken.

Daher ist die Folge beschränkt.</td></tr>
</table>

Die Monotonie kann man auch über die Differenz $a_{n+1} - a_n$ nachweisen. Demnach gilt:

Eine Folge ist monoton fallend, wenn für alle n ∈ IN* gilt: $a_{n+1} - a_n \leq 0$, und

Eine Folge ist monoton steigend, wenn für alle n ∈ IN* gilt: $a_{n+1} - a_n \geq 0$.

Beispiel: Gegeben ist die Folge

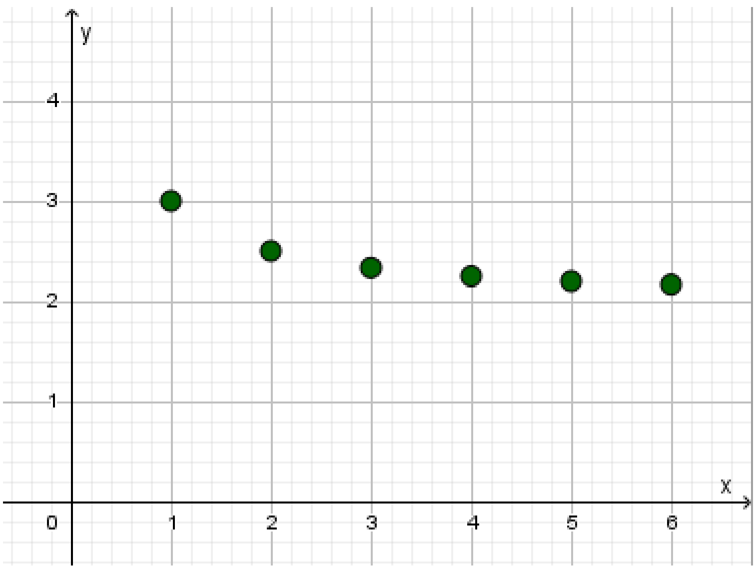
$$a_n = \frac{1 + 2n}{n}$$

a) Zeichne die Funktion.

b) Bestimme das Monotonieverhalten mittels der Differenz.

Lösung:

a) Wir schreiben die Folge um, damit sie für uns anschaulicher wird.
$a_n = \frac{1+2n}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2n}{n} = \frac{1}{n} + 2$ Nun sieht man leicht, wie diese Folge aussieht.



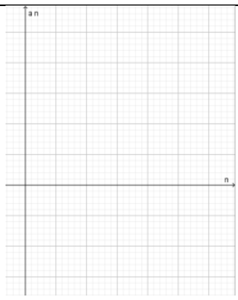
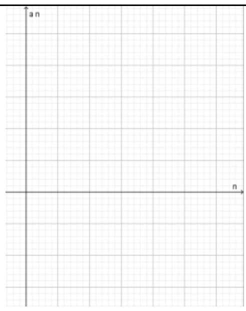
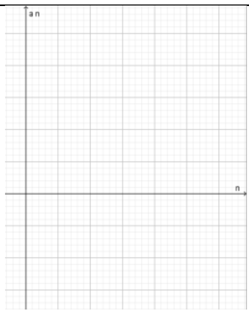
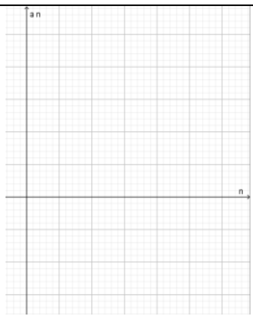
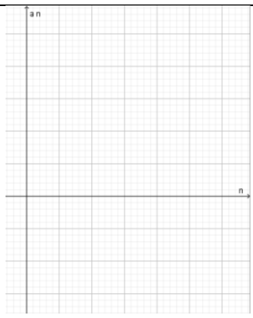
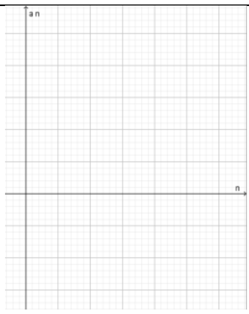
b) Berechnen wir nun : $a_{n+1} - a_n$

$$\frac{1 + 2(n+1)}{n+1} - \frac{1 + 2n}{n} = \frac{1}{n+1} + 2 - \left(\frac{1}{n} + 2\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)}$$
$$= \frac{n - (n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n^2 + n}$$

Für alle n ∈ IN* gilt: $-\frac{1}{n^2+n} < 0$. Daher ist die Folge streng monoton fallend.

Diese Kriterium kann manchmal leichter sein, als mit der obigen Definition für Montonie zu arbeiten.

Anmerkung: Die Folge ist auch beschränkt, da z.B. S = 4 und s = 1 ist.

Folge	Skizze	Monotonie	Beschränktheit
$a_n = \frac{2}{n}$		Monoton fallend	s = 0 S = 2
$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$		Monoton fallend	s = 0 S = 1
$a_n = (-1)^n$		Weder noch	s =-1 S = 1
$a_n = -1^n$		Weder noch	s = -2 S = 0
$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$		Weder noch	s = 0 S = 2
$a_n = \frac{8n}{n^2 + 1}$		Streng monoton fallend	s = 0 S = 4

Nachweis der Monotonie		
Folge	Über die Definition	Über die Differenz $a_{n+1} - a_n < 0$ => str. mon. fallend.
$a_n = \frac{2}{n}$	Folge: $a_n = \frac{2}{n}$ Zu zeigen: $a_{n+1} < a_n$ Bew: Da n > 1 ist, gilt: $n < n + 1$ $2n < 2n + 2$ $2n < 2(n + 1)$ $2 < \frac{2(n+1)}{n}$ $\frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}$ $a_{n+1} < a_n$ => Die Folge ist streng monoton fallend. □	Zu zeigen: $a_{n+1} - a_n < 0$ Bew: $\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} < 0$ $\frac{2n}{n(n+1)} - \frac{2(n+1)}{n(n+1)} < 0$ $\frac{2n - 2n - 2}{n(n+1)} < 0$ $\frac{-2}{n(n+1)} < 0 \mid \cdot n(n+1)$ $-2 < 0$ => Die Folge ist streng monoton fallend. □
$a_n = 2 + \frac{1}{n}$	Folge: $a_n = \frac{2}{n}$ Zu zeigen: $a_{n+1} < a_n$ Bew: Da n > 1 ist, gilt: $n < n + 1$ |:n $1 < \frac{(n+1)}{n}$ |: (n+1) $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ | + 2 $2 + \frac{1}{n+1} < 2 + \frac{1}{n}$ $a_{n+1} < a_n$ => Die Folge ist streng monoton fallend.	Zu zeigen: $a_{n+1} < a_n$ Bew: -1 < 0 = $\frac{-1}{n(n+1)} < 0$ = $\frac{n-(n+1}{n(n+1)} < 0$ = $\frac{n}{n(n+1)} - \frac{n+1}{n(n+1)} < 0$ = $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$ = $2 + \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n} < 0$ => Die Folge ist monoton fallend.
$a_n = 2 + 3n$	Zu zeigen: $a_{n+1} > a_n$ Bew: Da n > 1 ist, gilt: $n + 1 > n$ $3n + 3 > 3n$ 3(n+1) > n $2 + 3(n + 1) > 2 + 3n$ $a_{n+1} > a_n$ => Die Folge ist streng monoton steigend.	Zu zeigen: $a_{n+1} - a_n > 0$ Bew: 2 + 3(n + 1) - (2 + 3n) = $2 + 3n + 3$ -2 - 3n = 3 > 0 => Die Folge ist streng monton steigend

<table>
<tr>
<td>$a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$</td>
<td>Zu zeigen: $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ist monoton fallend.

Bew: $\frac{3}{4} < 1$
$\left(\frac{3}{4}\right)^1 < 1^1$
$\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} < \left(\frac{3}{4}\right)^n$
$a_{n+1} < a_n$
=> Die Folge ist streng monoton fallend.
□</td>
<td>Zu zeigen: $a_{n+1} - a_n < 0$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{3}{4}\right)^n$
$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$
$= \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$
$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{3}{4} - 1\right)$
$= \left(\frac{3}{4}\right)^n \left(-\frac{1}{4}\right)$
$-\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n < 0$
=> Die Folge ist streng monoton fallend. □</td>
</tr>
<tr>
<td>$a_n = -1^n$</td>
<td>Beh: Die Folge -1^n ist monoton fallend/steigend.
Bew:
$1 = 1$
$1^n = 1^n$
$-1^n = -1^n$
$-(1^n \cdot 1) = -1^n$
$-(1^n \cdot 1^1) = -1^n$
$-1^{n+1} = -1^n$
$a_{n+1} = a_n$
=> Die Folge ist monoton aber nicht streng monoton. Man kann sie sowohl alsmonoton fallend als auch als monoton steigend bezeichnen. □</td>
<td>Zu zeigen: $a_{n+1} - a_n = 0$
Bew:
$-1^{n+1} - (-1^n) = 0$

$-(1^n \cdot 1^1) + 1^n = 0$
$-(1 \cdot 1) + 1 = 0$
-1+1 = 0
0 = 0

=> Die Folge ist monoton fallend/steigend. □</td>
</tr>
<tr>
<td>$a_n = (-1)^n$</td>
<td colspan="2">Beh: a_n ist nicht monoton!
Bew:
$a_1 = (-1)^1 = -1$
$a_2 = (-1)^2 = +1$
$a_3 = (-1)^3 = -1$
Es gilt:
$a_1 < a_2$ aber auch $a_2 > a_3$

=> Die Folge ist weder monoton steigend noch fallend.
□</td>
</tr>
</table>

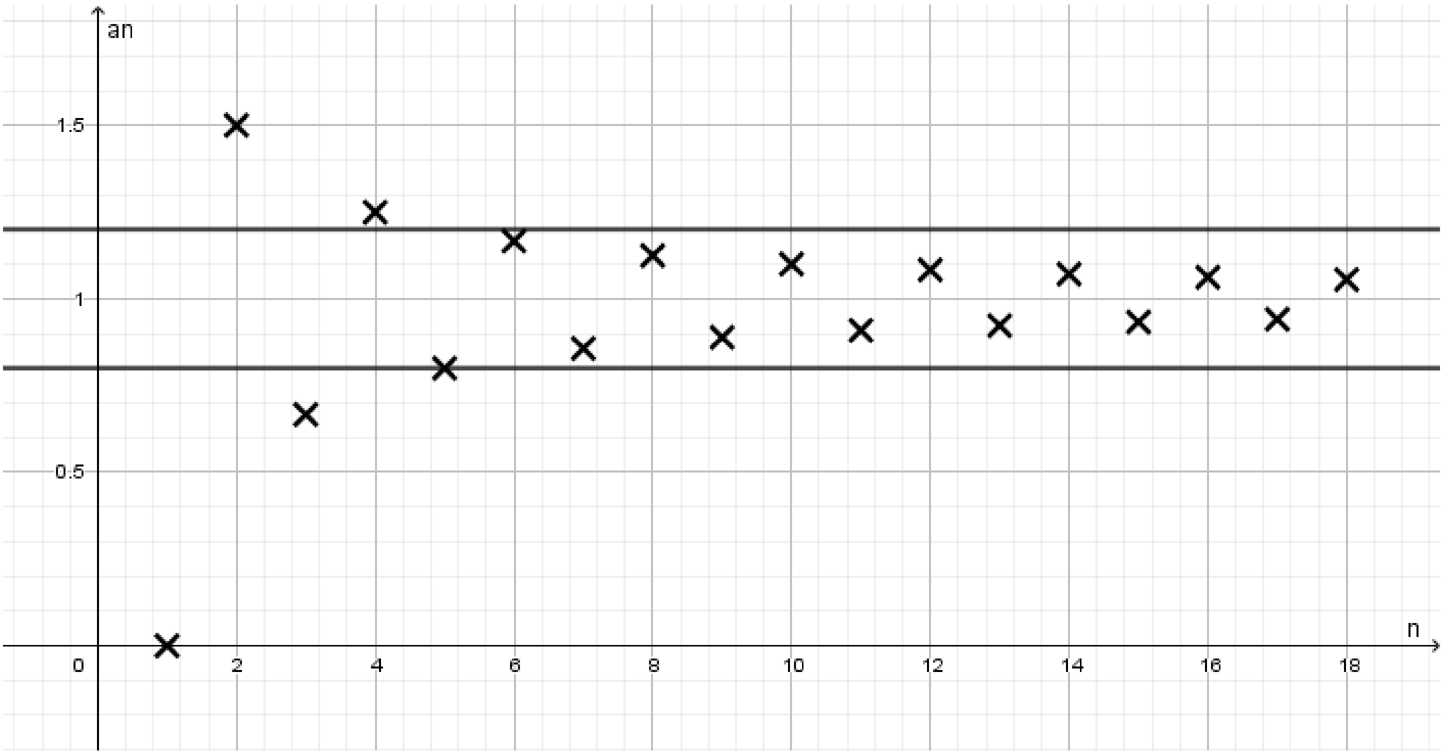
$a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$	Beh: Die Folge $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ ist nicht monoton. Bew: $a_1 = 1 + \frac{(-1)^1}{1} = 1 + \frac{-1}{1} = 1 + (-1) = 0$ $a_2 = 1 + \frac{(-1)^2}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$ $a_3 = 1 + \frac{(-1)^3}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $a_1 < a_2 > a_3$ => Die Folge ist nicht monoton. □

9. Grenzwert einer Folge

In den obigen Beispielen haben wir Folgen gesehen, die sich an eine bestimmte Zahl annähern, ohne sie selbst zu erreichen. So nähert sich die Folge $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ an die 1 an.

Diese Zahl nennt man Grenzwert einer Folge.

Definition: Eine Zahl g heißt Grenzwert der Zahlenfolge a_n, wenn bei Vorgabe irgendeiner positiven Zahl ε **fast alle** Folgeglieder die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ erfüllen. „Fast alle“ bedeutet dabei, dass es nur endlich viele Ausnahmen gibt.



Für den Grenzwert g schreiben wir: $g = \lim_{n \to \infty} a_n$. Gelesen: g ist der Limes von a_n für n gegen unendlich.

Andere Schreibweise: $a_n \to g$ für $n \to \infty$ Gelesen: a_n geht gegen g für n gegen unendlich.

Folgen, die einen Grenzwert haben, nennt man **konvergente Folgen**.

Folgen ohne Grenzwert nennt man **divergente Folgen.**

Hat eine Folge (a_n) den Grenzwert 0, so nennt man (a_n) eine **Nullfolge**.

(Etwas Latein: convergere: zusammenlaufen, divergere: auseinanderlaufen.)

Vorgehen um Konvergenz nachzuweisen:

1. Folge in TR eingeben ➔ Grenzwert g
2. ε festlegen, z.B. 0,01
3. Schreibe Ungleichung $|a_n - g| < 0{,}01$
4. Löse nach n auf. Kann man ein n angeben, ab dem die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ gilt, ist die Folge konvergent und hat den vermuteten Grenzwert.

Beispiel:

$$a_n = 2 + \frac{1}{n}$$

Der Taschenrechner sagt, dass der Grenzwert 2 ist, was man der Folge auch ansieht.

1. Vermuteter Grenzwert: 2
2. ε festlegen, z.B. 0,1 oder allgememein lassen und erst am schluss festlegen
3. $|2 + \frac{1}{n} - 2| < 0{,}1$
4. Löse nach n auf. $\left|\frac{1}{n}\right| < 0{,}1$

   $\frac{1}{n}$ ist positiv, daher darf man die Betragstriche weglassen.

   $\frac{1}{n} < 0{,}1$ | ·n |:0,1

   $\frac{1}{0{,}1} < n$

   10 < n

   n > 10
5. Ab n > 10, ist die Ungleichung $|2 + \frac{1}{n} - 2| < 0{,}1$

   => Der vemutete Grenzwert ist richtig. Fast alle Folgeglieder ab n > 10 liegen im „ε-Schlauch“.

Anmerkung:

Man muss ε nicht unbedingt festlegen, dann sieht der Rechneweg folgendermaßen aus:

Löse nach n auf. $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$

$\frac{1}{n}$ ist positiv, daher darf man die Betragstriche weglassen.

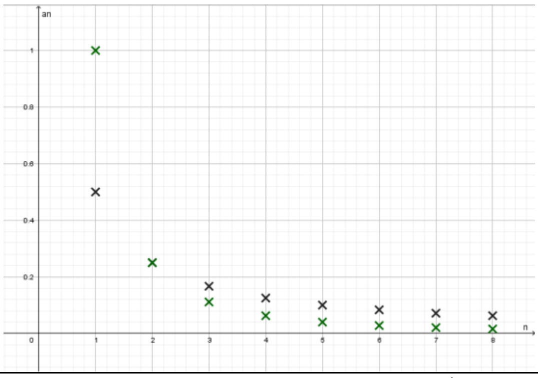
$\frac{1}{n} < \varepsilon$ | ·n |: ε

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

Als alle Folgeglieder, die größer sind als $\frac{1}{\varepsilon}$ liegen in der ε Umgebung.

9.1 Nullfolgen

Hat eine Folge den Grenzwert 0, so nennt man diese Folge **Nullfolge.**



Beispiel: Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{1}{2n}$ eine Nullfolge ist. Rechnung: $\left\|\frac{1}{n} - \mathbf{0}\right\| < \varepsilon$ $\left\|\frac{1}{n}\right\| < \varepsilon$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ | ·n |: ε $\frac{1}{\varepsilon} < n$ Also alle Folgeglieder, die größer sind als $\frac{1}{\varepsilon}$ liegen in der ε Umgebung. Daher ist die Folge eine Nullfolge.	Beispiel: Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{1}{2n} + 1$ eine Nullfolge ist. Rechnung: $\left\|\frac{1}{n} + 1 - \mathbf{0}\right\| < \varepsilon$ $\left\|\frac{1}{n} + 1\right\| < \varepsilon$ $\frac{1}{n} + \frac{n}{n} < \varepsilon$ $\frac{1+n}{n} < \varepsilon$ | ·n |: ε $\frac{1+n}{\varepsilon} < n$ Setzen wir mal für ε = 0,1 $\frac{1+n}{0,1} < n$ 10 + 10n < n 10 < -9 n | :(-9) -1,11 > n D.h. die Gleichung ist nicht erfüllbar, da nur endlich viele, hier sogar gar keine, Folgeglieder in der ε Umgebung liegen. Daher ist die Folge keine Nullfolge.

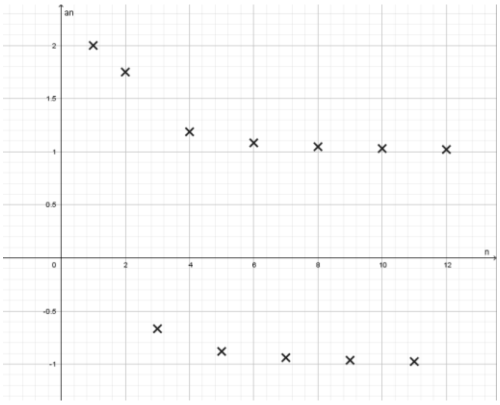
Nachweis eines Grenzwertes mit der Nullfolge:

Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergiert.

Lösung: Klar, es gilt $0 < \frac{1}{n^2}$. Jetzt suchen wir eine Folge, die größer ist als $a_n = \frac{1}{n^2}$ und von der wir wissen, dass diese gegen 0 konvergiert. Dies kann z.B. die Folge $a_n = \frac{1}{2n}$ sein. Dass dies eine Nullfolge ist haben wir schon ausgerechnet. Es gilt also folgende Gleichung:

$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n}$. Da als die Folgen größer als Null ist. Jedes Folgeglied von $\frac{1}{n^2}$ kleiner als $\frac{1}{2n}$ ist und $\frac{1}{2n}$ gegen 0 konvergiert, muss auch $\frac{1}{n^2}$ gegen 0 konvergieren.

Nachweis von Divergenz mit der Nullfolge:



Zeige, dass die Folge $a_n = \frac{3+n^2\cdot(-1)^n}{n^2}$ divergiert.

Lösung: $a_n = \frac{3+n^2\cdot(-1)^n}{n^2} = \frac{3}{n^2} + \frac{n^2\cdot(-1)^n}{n^2} = \frac{3}{n^2} + (-1)^n$. Da $\frac{3}{n^2}$ eine Nullfolge ist und gegen Null strebt, aber $(-1)^n$ die Werte +1 und – 1 liefert, ist die Folge divergent.

Anmerkung: Möchte man zeigen, dass eine Folge einen Grenzwert hat, kann man auch zeigen, dass die Folge beschränkt und streng monoton ist. Folgen mit beiden Eigenschaften müssen einen Grenzwert haben.

10. Der Limes

Einführung: Statt Grenzwert einer Folge, schreibt man auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Gelesen: Der Limes für n gegen unendlich ist g.

Beispiele:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Gelesen: Der Limes für n gegen unendlich von 1 durch n ist 0. Begründung: Setzt man für n große Werte ein, dann strebt 1 durch n gegen 0.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2n = \infty$. Gelesen: Der Limes für n gegen unendlich von 2n ist plus unendlich. Begründung: Setzt man für n große Werte ein bzw. strebt n gegen unendlich, dann strebt auch 2n gegen unendlich. Damit hat die Folge keinen Grenzwert und ist divergent.

$\lim\limits_{n\to\infty} 2 = 2$. Gelesen: Der Limes für n gegen unendlich von 2 ist 2. Begründung: Hier kann man nichts einsetzen bzw. jedes Folgeglied ist 2. Daher ist auch der Grenzwert 2.

$\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$. Gelesen: Der Limes für n gegen unendlich von 1 ist 1 und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Daher gilt für den Limes 1 + 0 = 1. Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$.

Dies bringt uns zu den Grenzwertsätzen: Satz

Haben die Folgen a_n und b_n jeweils die Grenzwerte a und b (a, b $\in \mathbb{R}$), dann gelten die folgenden Aussagen:

1.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b$

2.) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \cdot b$

3.) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}$

Beispiele

$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 2 + 0 = 2$$

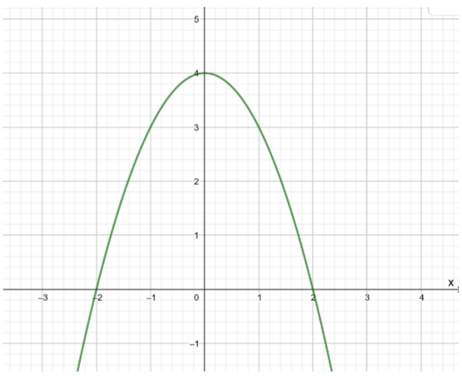
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x}}{\lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0}{2} = 0$$

11. Grenzwerte an einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Nicht nur Folgen, sondern auch Funktionen können Grenzwerte besitzen. Ebenso wie bei den Folgen gelten auhc hier die Grenzwertsätze. Unterschiedlich ist die Schreibweise, da man nun anstatt n eben x schreibt.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

12. Grenzwerte an einer Stelle



Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^2 + 2$

Lässt man nun x von links gegen 1 „laufen“, dann strebt der y-Wert gegen 3. Wir schreiben: $\lim\limits_{x\to 2(-)}(-x^2+2) = 3$ Die Schreibweise 2(-) bedeutet hierbei, dass der Grenzwert von links, also vom Negativen aus gegen 1 geht. Analog gilt für die rechtseitige Annäherung:

$\lim\limits_{x\to 2(+)}(-x^2+2) = 3$. Da der linksseitige und der rechtseitige Grenzwert gleich ist, sagen wir, dass die Funktion an der Stelle x = 1 einen Genzwert besitzt und zwar 3.

Auf eine genaue mathematische Definition verzichten wir an dieser Stelle.

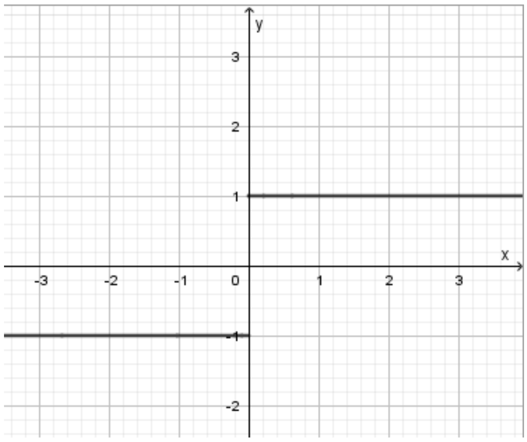
Beispiel für eine Funktion, die keinen Grenzwert an einer bestimmmten Stelle besitzt.

Wir definieren folgende Funktion abschnittsweise.

$$f(x) = \begin{cases} -1\ für\ x < 0 \\ +1\ für\ x > 0 \end{cases}$$

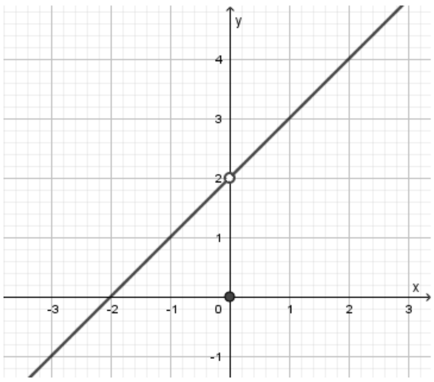
Hier gilt: $\lim\limits_{x \to 0(+)} f(x) = 1$

und $\lim\limits_{x \to 0(-)} f(x) = -1$



An der Stelle x = 0 nähert sich die Funktion von links gegen -1 und von rechts gegen +1. es gibt also zweio unterschiedliche Grenzwerte. Per Festlegung sagen wir, dass die Funktion an der Stelle x = 0 keinen Grenzwert besitzt.

Beispiel für eine Funktion, die einen Grenzwert hat, der aber nicht mit dem Funktionswert übereinstimmt.



Wieder nehmen wir eine Trreppenfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\ für\ x\ \neq 0 \\ \quad 0\ \ für\ x = 0 \end{cases}$$

Also eine lineare Funktion, die an der Stelle x = 0 nicht den y-Wert 2, sondern nden y Wert 0 hat. Am Grwaphen erkennt man dies daran, dass der Kreis bei y = 2 leer ist und der Kreis bei y= 0 ausgemalt ist.

Wie verhalten sich nun die Grenzwerte?

Es gilt: $\lim\limits_{x \to 0(+)} f(x) = 2$

und ebenso $\lim\limits_{x \to 0(-)} f(x) = 2.$

Es gibt also an der Stell x = 0 einen Grenzwert, und zwar 2. Dass dieser nicht mit dem Funktionswert übereinstimmt, ist kein Problem.

Auch hier gelten die Grenzwertsätze:

Hat für $x \ \to \ x_0$die Funktion u den Grenzwert a und die Funktion v den Grenzwert b, dann hat für $x \ \to \ x_0$die Funktion

(1) u + v den Grenzwert a + b

(2) u – v den Grenzwert a – b

(3) u · v den Grenzwert a · b

(4) $\frac{u}{v}$ den Grenzwert $\frac{a}{b}$, falls b $\neq$ 0 ist.

Beispiele: Sei f(x) = 2x + 2, dann gilt

a) $\lim\limits_{x \to 0(+)} (2x + 2) = \lim\limits_{x \to 0(+)} 2x + \lim\limits_{x \to 0(+)} 2 = 0 + 2 = 2$

und ebenso gilt dies für $\lim\limits_{x \to 0(-)} f(x) = 2.$

b) $\lim\limits_{x \to 0(+)} \frac{x}{x+1} = \frac{\lim\limits_{x \to 0(+)} x}{\lim\limits_{x \to 0(+)} x+1} = \frac{0}{1} = 0$

Soweit das Skript „Folgen“ , Anregungen , Kritik etc. gerne an GSahliger@aol.com